



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-RENNES

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 663

**PROBABILITÉ STATIONNAIRE
D'UNE FILE D'ATTENTE
À 2 SEUILS**

Louis-Marie LE NY

Mai 1987

PUBLICATION INTERNE N° 354 - MARS 1987 - 16 PAGES

PROBABILITE STATIONNAIRE D'UNE FILE D'ATTENTE A 2 SEUILS

Louis-Marie LE NY

RESUME:

Nous étudions dans cet article une file d'attente à capacité limitée N comprenant 2 seuils m et M . Si le nombre de clients dans la file atteint la valeur M , les taux d'arrivée et de service sont modifiés; de même si le nombre de clients atteint la valeur m .

Nous obtenons des expressions exactes pour les probabilités d'état en régime stationnaire et traitons quelques exemples où les termes $p(0)$ et $p(N)$ sont très petits.

MOTS-CLES: File d'attente, seuil, capacité limitée, coupe, probabilité stationnaire, chaînes de Markov.

STEADY-STATE PROBABILITY FOR A QUEUE WITH TWO THRESHOLDS

ABSTRACT:

In this paper a queue with a limited capacity N and 2 thresholds m and M is analyzed. If the number of customers in the station reaches the value M (resp. m), then the arrival and service rates are modified.

Exact formulas are derived for the steady-state probabilities and some examples are presented where $p(0)$ and $p(N)$ are insignificant.

KEYWORDS: Queue, threshold, limited capacity, cut, steady-state probability, Markov chains.

A-INTRODUCTION ET NOTATIONS

A1-DESCRIPTION DU MODELE

L'objet de cet article est de présenter un modèle de file d'attente à capacité limitée dont les probabilités $p(0)$ et $p(N)$ peuvent être simultanément très petites .

Ce type de situation apparait dans le domaine des télécommunications ; par exemple en télévision cablée ou les files d'attente sont les tampons nécessaires à la transmission des données . Si certains tampons sont vides il se produit une interruption d'image ; inversement un tampon plein provoque des pertes de données et des blocages.

Pour la modélisation de ces problèmes , nous introduisons 2 seuils m et M ; le seuil M est en général voisin de N et permet d'éviter la saturation de la file ; le seuil m , voisin de 0 , permet d'éviter que la file ne se vide .

Avoir obtenu des formules exactes pour les probabilités d'état, nous pourrions déterminer les couples (m, M) pour lesquels les probabilités $p(0)$ et $p(N)$ sont inférieures à des valeurs ϵ et ϵ' arbitraires .

A2-HYPOTHESES ET NOTATIONS

Dans un premier temps nous supposerons les lois de service exponentielles de taux constants notés μ et μ' ainsi que les distributions des interarrivées de taux λ et λ' .

Le choix de ces taux est lié au mécanisme de fonctionnement de la file représenté sur le graphe markovien de la figure 2 ci-dessous: dès que le nombre de clients dans la file atteint la valeur M , les taux sont λ' et μ' et sont remplacés par λ et μ lorsque ce nombre est égal à m .

B-MODELISATION MARKOVIENNE

B.1-GRAPHE DE TRANSITION

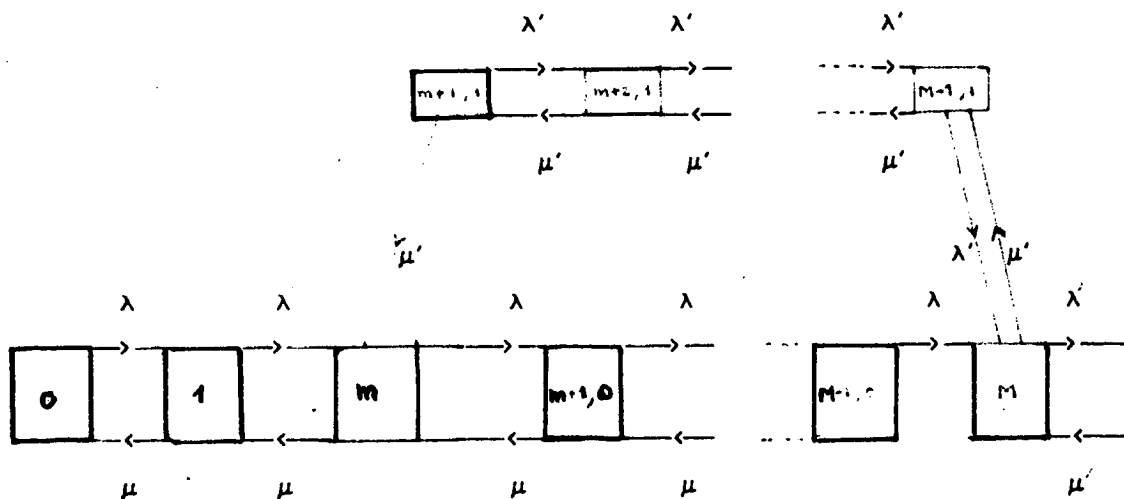
En raison de l'existence des seuils m et M , pour obtenir un modèle markovien, nous utilisons 2 indices 0 et 1 pour caractériser certains états (fig 2) :

-Si le nombre de clients n dans la file est inférieur ou égal à m ou supérieur ou égal à M , on pose $e=n$.

-Si $m < n < M$ on pose $e=(n, 1)$ si tout chemin orienté joignant m à e passe par M .

-On note $e=(n, 0)$ s'il existe un chemin orienté joignant m à e et ne passant pas par M .

Sous ces hypothèses nous pouvons modéliser l'évolution de l'état de la file par une chaîne de Markov irréductible dont le graphe des transitions est représenté ci-dessous (fig 2) :



- fig 2 -

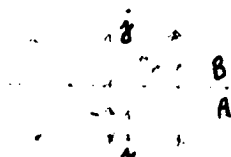
B.2-EQUATIONS EN REGIME STATIONNAIRE

Les probabilités d'état sont obtenues en utilisant le résultat suivant relatif à la conservation du flux de transition [1] [2] [3] [4] [5] [6]:

Pour tout processus homogène ergodique d'ensemble d'états E , et pour toute partition (A, B) de E , la fréquence des transitions de A vers B est égale à la fréquence des transitions de B vers A .

Ce résultat, encore appelé méthode des coupes (fig 3), peut s'écrire :

$\forall A \subseteq E, \forall B \subseteq E$ tels que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$



$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in B} p_i \alpha_{ij} = \sum_{j \in B} \sum_{i \in A} p_j \alpha_{ji}$$

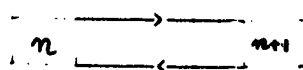
où p_i est la probabilité que la file soit dans l'état i et α_{ij} est le taux de transition de l'état i vers l'état j .

- fig 3 -

En choisissant judicieusement 3 types de coupe dans le graphe markovien défini ci-dessus (fig 2), nous obtenons les équations permettant de calculer les probabilités d'état.

TYPES DE COUPES UTILISEES :

TYPE 1 :

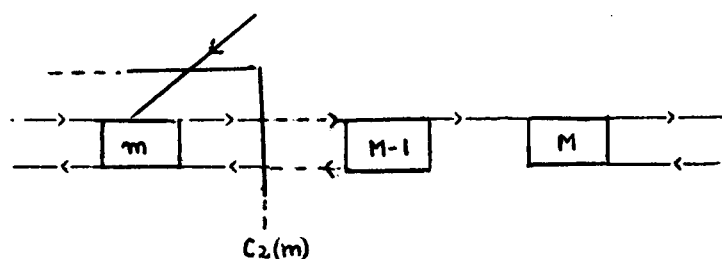


$$0 \leq n \leq m-1$$

$$M \leq n \leq N-1$$

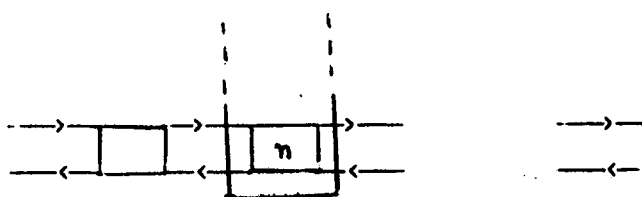
-Coupe C1(n)-

TYPE 2 :



· Coupe $C2(n)$ pour $m \leq n \leq M-1$

TYPE 3 :



· Coupe $C3(n)$ pour $m+1 \leq n \leq M-1$.

Pour alléger les notations nous poserons :

$$u_n = p(n) \text{ si } 0 \leq n \leq m$$

$$u_n = p(n, 0) \text{ si } m < n < M$$

$$v_n = p(n, 1) \text{ si } m < n < M$$

$$v_n = p(n) \text{ si } M \leq n \leq N$$

les coupes $C1(n)$ nous fournissent les équations :

$$(E1) \quad u_n \lambda = u_{n+1} \mu, \quad 0 \leq n \leq M-1$$

$$(E2) \quad v_n \lambda' = v_{n+1} \mu', \quad M \leq n \leq N-1$$

d'où , en posant $\rho = \lambda/\mu$ et $\rho' = \lambda'/\mu'$:

$$(R1) \quad u_n = \rho^n u_0 \quad \text{et}$$

$$(R2) \quad v_n = (\rho')^{n-M} v_M$$

En utilisant les coupes $C_2(n)$, on obtient les relations :

$$(E3) \quad u_n \lambda = u_{n+1} \mu + v_{m+1} \mu' \quad \text{pour } m \leq n \leq M-2$$

$$(E4) \quad u_{M-1} \lambda = v_{m+1} \mu'$$

d'où , par récurrence sur k :

$$\begin{aligned} u_{m+k} &= u_m \rho^k - v_{m+1} (\mu'/\mu) (\sum_{i=0}^{k-1} \rho^i) \\ (R3) \quad u_{m+k} &= u_m \rho^k - v_{m+1} (\mu'/\mu) ((1-\rho^k)/(1-\rho)) \\ &1 \leq k \leq M-m-1 \end{aligned}$$

En particulier , pour $k = M-m-1$, nous avons :

$$(R4) \quad u_{M-1} = u_0 \rho^{M-1} - v_{m+1} (\mu'/\mu) ((1-\rho^{M-m-1})/(1-\rho))$$

En reportant dans l'équation E4 , nous obtenons :

$$v_{m+1} = \frac{\rho^{M-1} u_0}{\frac{\mu'}{\lambda} + \frac{\mu' (1-\rho^{M-m-1})}{\mu (1-\rho)}}$$

Les expressions de v_n s'obtiennent à l'aide des coupes $C_3(n)$.

$$\text{D'après } C_3(m+1) \text{ , on a } v_{m+2} = \frac{\lambda' + \mu'}{\mu'} v_{m+1} = (\rho' + 1) v_{m+1}$$

Pour $m+2 \leq n \leq M-1$, on a :

$$v_{n+2}\mu' - v_{n+1}(\lambda' + \mu') + v_n\lambda' = 0$$

ou encore, en posant $n=m+k$

$$v_{m+k+2}\mu' - v_{m+k+1}(\lambda' + \mu') + v_{m+k}\lambda' = 0$$

Il s'agit donc de déterminer la suite $w_k = v_{m+k}$, $2 \leq k \leq M-m-2$, vérifiant l'équation de récurrence double :

$$(E5) \quad w_{k+2}\mu' - w_{k+1}(\lambda' + \mu') + w_k\lambda' = 0 \text{ et } w_1 = v_{m+1}, w_2 = v_{m+2}$$

Cette équation admet pour équation caractéristique :

$$r^2 \mu' - r(\lambda' + \mu') + \lambda' = 0$$

dont les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{\lambda'}{\mu'} = \rho'$

La solution est donc $w_k = c_1 + c_2(\rho')^k$;
ces constantes c_1 et c_2 sont telles que :

$$c_1 + c_2 \rho' = v_{m+1}$$

$$c_1 + c_2(\rho')^2 = v_{m+2}$$

$$\text{d'où } c_1 = \frac{v_{m+1}}{1 - \rho'} \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{v_{m+1}}{1 - \rho'}$$

$$\text{et } w_k = \frac{v_{m+1}}{1 - \rho'} + \frac{v_{m+1}}{\rho' - 1} (\rho')^k = \frac{1 - (\rho')^k}{1 - \rho'} v_{m+1}$$

pour $1 \leq k \leq M-m$

d'où le résultat

$$(R5) \quad v_{m+k} = \frac{1 - (\rho')^k}{1 - \rho'} v_{m+1}, \quad 1 \leq k \leq M-m-1$$

3- RESUME DES RESULTATS

$$p(n) = \rho^n p(0) \quad , \quad 0 \leq n \leq m$$

$$p(n, 0) = (\rho^{n-m} + \frac{\rho^{M-1} \lambda (1 - \rho^{n-m})}{\mu (1 - \rho^{M-m})}) p(0) \quad , \quad m < n < M$$

$$p(n, 1) = (\frac{(1 - \rho^{n-m}) \rho^{M-1} \lambda (1 - \rho)}{(1 - \rho') \mu' (1 - \rho^{M-m})}) p(0) \quad , \quad m < n < M$$

$$p(n) = \frac{(\rho')^{n-M} (1 - (\rho')^{M-m}) \rho^{M-1} \lambda (1 - \rho)}{(1 - \rho') (\mu' (1 - \rho^{M-m}))} p(0) \quad , \quad M \leq n \leq N$$

$p(0)$ est obtenue à l'aide de la relation de normalisation:

$$\sum_{n=0}^m p(n) + \sum_{n=m-1}^{M-1} p(n, 0) + \sum_{n=m-1}^{M-1} p(n, 1) + \sum_{n=M}^N p(n) = 1$$

C- GENERALISATION . TAUX DEPENDANT DE L'ETAT .

Dans ce paragraphe , nous conservons les hypothèses précédentes mais nous supposons que les taux de service et d'arrivée dépendent du nombre de clients dans la file .

Comme dans B nous pouvons construire un modèle markovien (fig 2) où les taux de transition dépendent de l'état .

Seuls les termes $p(n, 1)$, $m+2 \leq n \leq M$ ne seront pas donnés sous forme explicite ; les relations de récurrence suivantes permettent de les calculer par programme.

$$p(m+2, 1) \mu'(m+2) = p(m+1, 1) (\lambda'(m+1) + \mu'(m+1))$$

$$p(n+1, 1) \mu'(n+1) = p(n+1, 1) (\lambda'(n) + \mu'(n)) - p(n-1) \lambda'(n-1)$$

$$\text{pour } m+2 \leq n \leq M-1$$

RESULTATS

$$p(n) = \prod_{k=1}^n \frac{\lambda(k-1)}{\mu(k)} p(0) \quad , \quad 0 \leq n \leq m$$

$$p(m+1, 1) = \frac{\prod_{i=1}^{M-1} \lambda(i-1)}{\prod_{i=1}^{M-m-1} \mu(i)} p(0) + \frac{\mu'(m+1)}{\lambda(M-1)} + \sum_{j=1}^{M-m-1} \mu'(m+1) \frac{\prod_{i=j+1}^{M-m-1} \lambda(m+i-1)}{\prod_{i=j}^{M-m-1} \mu(m+i)}$$

$$p(m+k, 0) = \prod_{i=1}^k \frac{\lambda(m+i-1)}{\mu(m+i-1)} p(m) - \mu'(m+1) \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda(m+j-1)}{\mu(m+j-1)} p(m+1, 1)$$

(pour $1 \leq k \leq M-m-1$)

$$p(m+2, 1) = \frac{\lambda'(m+1) + \mu'(m+1)}{\mu'(m+2)} p(m+1, 1)$$

Les autres termes $p(n, 1)$ pour $m+2 \leq n \leq M-1$ sont obtenus à l'aide de la relation de récurrence :

$$p(n+1, 1) \mu'(n+1) = p(n, 1) (\lambda'(n) + \mu'(n)) - p(n-1, 1) \lambda'(n-1)$$

D- EXEMPLES DE CALCULS DE P(N)

NOTATION: L désigne l'espérance du nombre de clients.

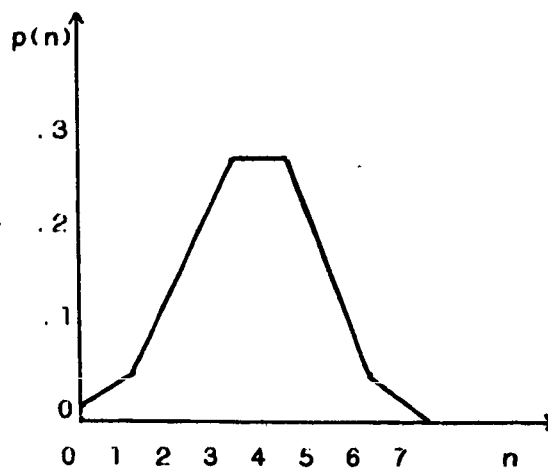
D-1 - TAUX CONSTANTS -

$$m=2 \quad M=5 \quad N=7$$

$$\lambda=4 \quad \lambda'=1 \quad \mu=1 \quad \mu'=4$$

$$\begin{aligned} p(0) &= 1.02E-02 \\ p(1) &= 4.13E-02 \\ p(2) &= 0.16 \\ p(3) &= 0.28 \\ p(4) &= 0.28 \\ p(5) &= 0.16 \\ p(6) &= 4.13E-02 \\ p(7) &= 1.03E-02 \end{aligned}$$

$$L = 3.5$$

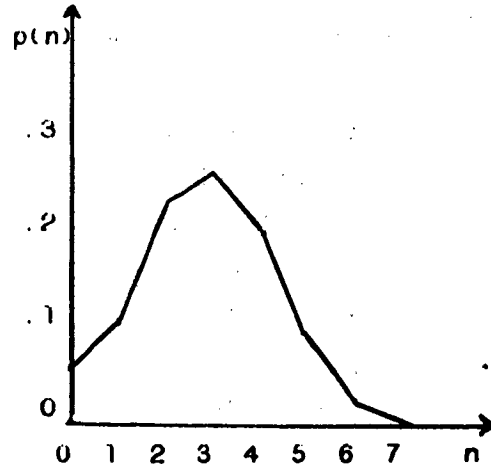


$m=3 \quad M=5 \quad N=7$

$\lambda=2 \quad \lambda'=1 \quad \mu=1 \quad \mu'=4$

$p(0)=0.03$	$p(4)=0.29$
$p(1)=0.07$	$p(5)=0.12$
$p(2)=0.14$	$p(6)=0.03$
$p(3)=0.29$	$p(7)=0.07$

$L = 3.25$

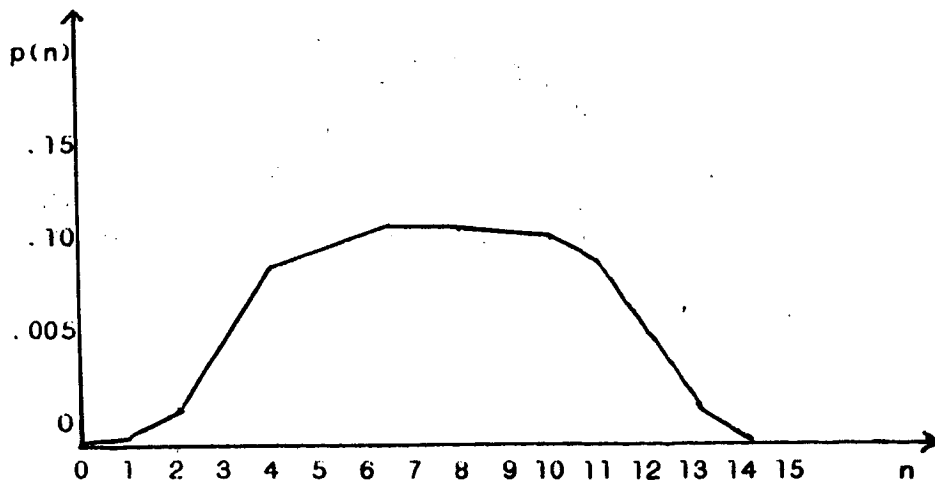


$m=3 \quad M=12 \quad N=15$

$\lambda=4 \quad \lambda'=1 \quad \mu=1 \quad \mu'=4$

$p(0)=8.68E-04$	$p(6)=0.11$	$p(12)=5.55E-02$
$p(1)=3.47E-03$	$p(7)=0.11$	$p(13)=1.38E-02$
$p(2)=1.38E-02$	$p(8)=0.11$	$p(14)=3.47E-03$
$p(3)=5.55E-02$	$p(9)=0.11$	$p(15)=8.68E-04$
$p(4)=0.09$	$p(10)=0.10$	
$p(5)=0.107$	$p(11)=0.09$	

$L = 7.5$



D-2 -TAUX VARIABLES

$$m=3 \quad M=12 \quad N=15$$

$$\lambda(k) = (M-k)/3, \quad 0 \leq k \leq M-1$$

$$\mu(k) = 2, \quad 1 \leq k \leq M-1$$

$$\lambda'(k) = 1, \quad m \leq k \leq N-1$$

$$\mu'(k) = 2(k-m)+1, \quad m+1 \leq k \leq N.$$

$$p(0) = 1.18E-02$$

$$p(8) = 0.13$$

$$p(1) = 2.37E-02$$

$$p(9) = 0.85E-02$$

$$p(2) = 4.34E-02$$

$$p(10) = 4.11E-02$$

$$p(3) = 7.24E-02$$

$$p(11) = 1.19E-02$$

$$p(4) = 0.11$$

$$p(12) = 2.45E-04$$

$$p(5) = 0.14$$

$$p(13) = 1.29E-05$$

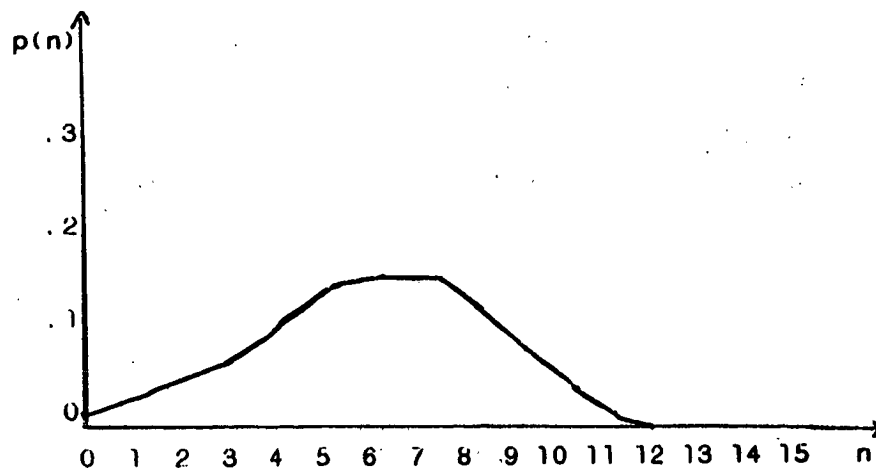
$$p(6) = 0.16$$

$$p(14) = 6.14E-07$$

$$p(7) = 0.16$$

$$p(15) = 2.67E-08$$

$$L = 5.96$$



E. DETERMINATION DES COUPLES (m, M) TELS QUE $p(0) < \epsilon$ ET $p(N) < \epsilon'$.

Les résultats suivants ont été obtenus par application des formules de la page pour différentes valeurs de $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ et pour $N = 16$.

Les couples appartenant aux parties hachurées sont tels que $p(0) < \epsilon$ et $p(N) < \epsilon'$.

Nous avons toujours supposé que $M > m$.

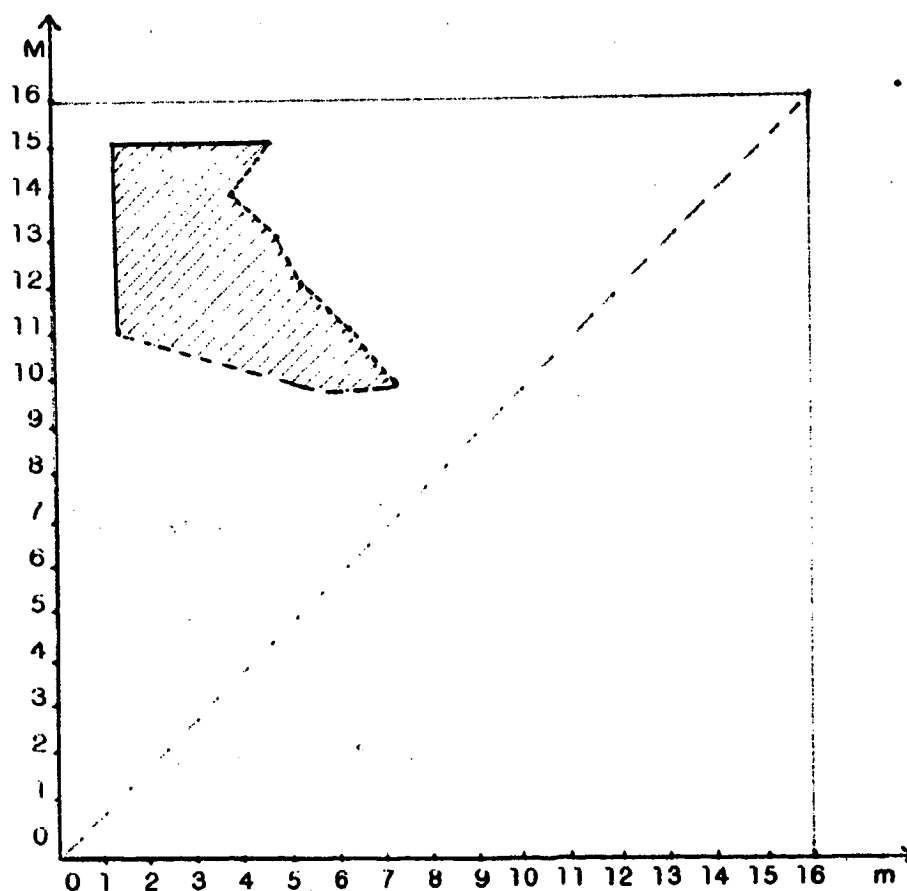
E1. EXEMPLE 1

$$\lambda=2, \mu=1, \lambda'=1, \mu'=3$$

$$\epsilon=1.E-1 \quad \epsilon'=1.E-5$$

Valeurs de M : 10 11 12 13 14 15

Valeurs max de m : 7 6 5 5 4 5



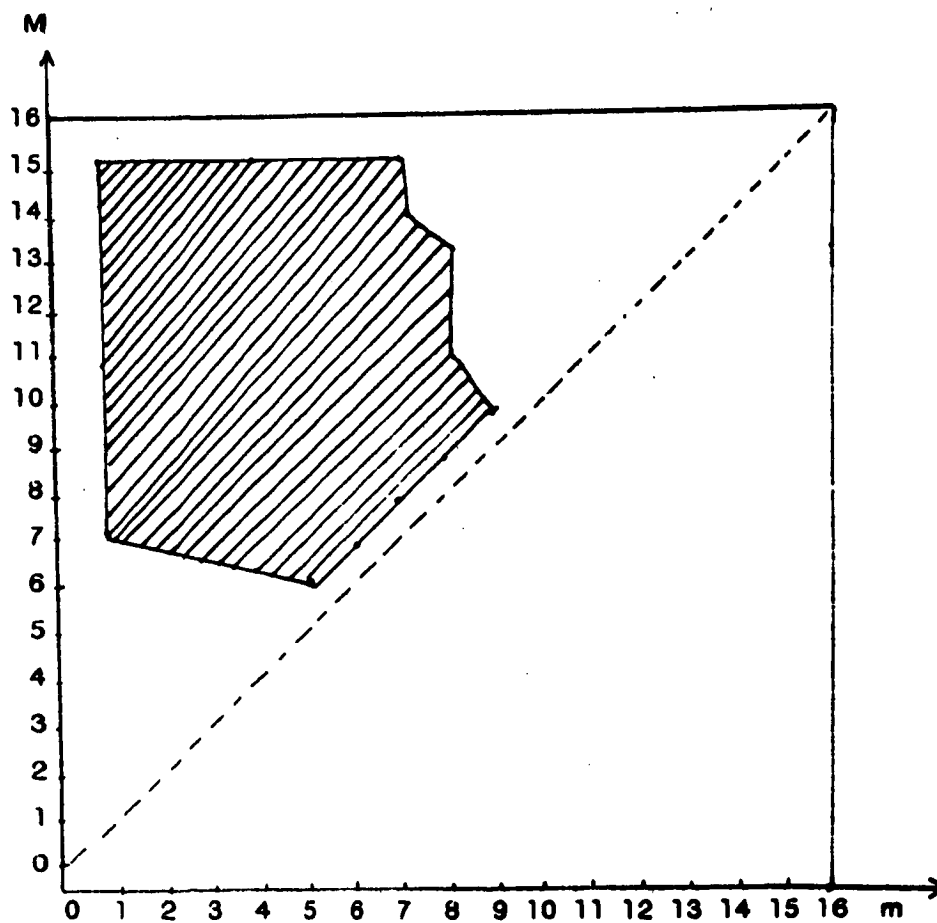
E2. EXEMPLE 2

$$\lambda=5 \quad \lambda'=1 \quad \mu=1 \quad \mu'=4 \quad , \epsilon=1.E-2 \quad \epsilon'=1.E-5$$

Valeurs de M : 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Valeurs max de m: 5 6 7 8 9 8 8 8 7 7

Valeurs min de m: 5 1 1 1 1 1 1 1 1 1



REFERENCES

[1] R. MARIE:

Approximations et applications de réseaux de files
d'attente.

Séminaires de Probabilités de Rennes & Rapport
I. R. I. S. A n° 65 - 1976 -

[2] R. MARIE:

Méthodes itératives de résolutions de modèles mathéma-
tiques.

R. A. I. R. O - Informatique . Vol 12 n°2 pp 107-122 . 1978.

[3] B. LEMAIRE:

Théorème de conservation des clients dans les files d'at-
tente -

R. A. I. R. O - Recherche Opérationnelle - pp 395-399 . 1978 .

[4] B. LEMAIRE:

Méthodes de conservation et blocage dans les files d'at-
tente -

R. A. I. R. O - Recherche Opérationnelle - pp 363-377. 1977.

[5] M. KRAKOWSKI:

Conservation Methods in queueing theory.

R. A. I. R. O - Operations Research . pp 63-83. 1973.

[6] F. P. KELLY:

Reversibility and Stochastic Networks.

Wiley - New York - 1980 .

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

